Chapitre II : Les intérêts composés

1. Principe et champ d’application

Un capital est dit placé à intérêt composé, lorsqu’à l’issue de chaque période de placement, les intérêts simples produits sont ajoutés au capital pour porter eux même intérêts à la période suivante au taux convenu. On parle alors d’une capitalisation des intérêts. Cette dernière opération est généralement appliquée lorsque la durée de placement dépasse un an. La distinction fondamentale entre intérêts composés et intérêts simples réside dans la capitalisation

1. Principe et champ d'application

Exemple : Calcul des intérêts produits par un capital de 1 000 DH placé pendant 3 ans au taux de 5%

Année	Capital placé à intérêts simples			Capital placé à intérêts composés		
	Capital placé début de période	Intérêts produits	Capital à la fin de période	Capital placé début de période	Intérêts produits	Capital à la fin de période
1	1000	50	1050	1000	50	1050
2	1000	50	1050	1050	52,50	1102,50
3	1000	50	1050	1102,50	55,125	1157,625
		150			**157,625**	

2. Formule fondamentale des intérêts composés

La différence vient de la capitalisation des intérêts, des intérêts qui produisent des intérêts, d'où le nom d'intérêts composés. Reprenons l'exemple ci-dessus, et généralisons-le au cas d'un capital C placé, pour n périodes, au taux périodique t :

Après 1 période le capital devient : $C + C\,t = C(1 + t)$

Après 2 périodes il devient : $C(1 + t) + C(1 + t)t = C(1 + t)^2$

Après 3 périodes il devient : $C(1 + t)^2 + C(1 + t)^2 t = C(1 + t)^3$

Après 4 périodes il devient : $C(1 + t)^3 + C(1 + t)^3 t = C(1 + t)^4$

Et ainsi de suite, après n périodes il devient : **$C(1 + t)^n$**

3. Valeur acquise d'un capital

La valeur acquise, notée C_n, d'un capital initial C_0, placé, pendant n périodes, au taux d'intérêt périodique t est donné par la formule générale

$$\mathbf{VA = C_n = C_0(1 + t)^n}$$

Ainsi, la somme totale des intérêts produits par un capital placé, pendant n périodes, au taux d'intérêt périodique t est :

$$\mathbf{I = C_n - C_0 = C_0\,(1+t)^n - C_0}$$

3. Valeur acquise d’un capital : Exemples

- Calculer la valeur acquise d’un capital de 7 500 DH, placé pendant 4 ans au taux annuel de 7 %.

- Calculer le montant du capital qui, placé, pendant 3 ans, au taux annuel de 10 %, acquiert une valeur égale à 9 500 DH.

- Quel est le taux d’intérêt d’un capital de 12 500 DH qui, placé, pendant 5 ans, acquiert une valeur de 19 298,19 DH ?

- Au bout de combien d’années un capital de 6 000 DH placé au taux annuel de 8,50 % acquiert-il une valeur de 8 510,83 DH ?

4. Valeur actuelle d’un capital

L'actualisation est l'opération inverse de la capitalisation, en effet:

- **Capitaliser** c'est déterminer, à un taux d’ intérêt composé donné, la valeur future d'une somme, à une date postérieure
- **Actualiser**, c'est déterminer la valeur actuelle, la valeur d’ aujourd’hui, à un taux d’intérêt donné, d'une somme payable à une période future.

Soit C un capital payable à une période future n et C_0 la valeur du capital C à la période actuelle 0, on a :

$$\mathbf{C = C_0 (1 + t)^n}$$

$$\mathbf{C_0 = C (1 + t)^{-n}}$$

Ainsi C_0 est dite : la valeur actuelle, à la date 0, du capital C

4. Valeur actuelle d'un capital : Exemples

- Quelle somme faut- il placer maintenant à intérêt composé au taux annuel de 9% pour avoir dans 5 ans une valeur acquise de 50 000 DH ?

- Quelle est la valeur acquise par un capital, après 3 années de placement, au taux d'intérêts de 7%, si sa valeur actuelle est de 5 000 DH ?

- Au bout de combien de temps un capital de valeur actuelle d'un montant de 13 500,00 DH acquiert-il une valeur de 19 795,38 DH s'il est placé à un taux d'intérêt de 6%, l'an ?

- A quel taux d'intérêt composé a été placé un capital qui a atteint un montant de 35 000 DH, au bout de 3 années alors que sa valeur actuelle n'est que de 30 000 DH?

5. Taux équivalent et taux proportionnel

- Les taux d'intérêt sont généralement exprimés en taux annuels. Mais, on peut considérer une période plus courte que l'année, par exemple, le semestre, le trimestre le mois ou le jour. De même, les intérêts peuvent être capitalisés chaque semestre, chaque trimestre, chaque mois ou chaque jour. Ainsi, lorsque le taux d'intérêt est annuel et l'on considère une période inférieure à l'année, le taux d'intérêt prévalant pour cette période devra être calculé. Pour ce faire, on emploie l'un des deux taux suivants :

Le taux proportionnel ou **le taux équivalent**

5. Taux équivalent et taux proportionnel

Deux taux correspondants à des périodes de capitalisation différentes, sont dits **équivalents** lorsqu'ils produisent la même valeur acquise quand ils sont appliqués au même capital.

- Valeur acquise au bout de n années, dans le cas de la 1è situation, est égale à $\mathbf{C_n = C\,(1 + t)^n}$
- Valeur acquise au bout de k x n périodes, dans le cas de la 2è situation, est égale à $\mathbf{C_{kn} = C(1 + t_k)^{kn}}$
- t et t_k sont équivalents si $C_n = C_{kn}$, ce qui donne : $C(1+t)^n = C(1+t_k)^{kn}$

$$(1+t) = (1+t_k)^k \longrightarrow (1+t)^{1/k} = (1+t_k)$$

$$t_k = (1+t)^{1/k} - 1$$

- t_k est le taux équivalent au taux annuel t, correspondant à une période k fois plus petite que l'année.

5. Taux équivalent et taux proportionnel

Deux taux correspondants à des périodes différentes sont dits **proportionnels**, lorsque leur rapport est égal au rapport de leurs périodes de capitalisation respectives.

Ainsi on appelle taux proportionnel au taux annuel t relatif à une durée p fois plus petite que l'année, le taux :

$$t_p = \frac{t}{p}$$

5. Taux équivalent et taux proportionnel

	Taux équivalent	Taux proportionnel
Mensuel	$t_m = (1+t)^{1/12} - 1$	$t_m = t_a/12$
Trimestriel	$t_t = (1+t)^{1/4} - 1$	$t_t = t_a/4$
Semestriel	$t_s = (1+t)^{1/2} - 1$	$t_s = t_a/2$

Taux proportionnel > Taux équivalent

En pratique, les deux taux sont utilisés. Pour les emprunts, les banques optent pour le taux proportionnel alors que pour les placements le taux équivalent est plus souvent appliqué

5. Taux équivalent et taux proportionnel

Exemple :

- Soit un capital de 35 000 DH placé au taux annuel d'intérêt composé de 12 % pendant une année. On se propose de calculer la valeur acquise par ce capital, au bout d'une année, en considérant les intérêts produits, par an, par semestre, par trimestre et par mois avec des taux équivalents et des taux proportionnels semestriels, trimestriels et mensuels

6. Equivalence de deux capitaux

- Deux capitaux placés, à des taux d'intérêt composé t_1 et t_2, à une date donnée, sont équivalents, s'il existe une date à la quelle ils ont la même valeur actuelle.

$$\bullet \quad \mathbf{C_1(1 + t_1)^{-n1} = C_2\,(1 + t_2)^{-n2}}$$

- Dans le cas où les deux taux d'intérêt sont égaux, la formule devient:

$$\bullet \quad \mathbf{C_1(1 + t)^{-n1} = C_2\,(1 + t)^{-n2}}$$

- **Remarque** : L'équivalence de capitaux à intérêt composé est indépendante de la date d'équivalence
- Les problèmes d'équivalence portent généralement sur la recherche des valeurs C_1 ou C_2, n_1 ou n_2.

6. Equivalence de deux capitaux

Exemples :

- Un débiteur désire rembourser par anticipation dans trois ans, une dette de 50 000 DH payable dans 6 ans. Déterminer la somme qu'il devra débourser au taux de 10%.

- Un débiteur décide de s'acquitter d'une dette de 20 000 DH, payable dans 6 ans par un règlement de 16 528,93 DH. déterminer au taux de 10%, la date à laquelle doit être opéré ce paiement.

7. Equivalence d'un capital avec la somme de plusieurs autres

Un capital est équivalent à la somme de plusieurs autres si, à une date quelconque, la valeur actuelle de ce capital est égale à la somme des valeurs actuelles des autres capitaux.

Désignons :

- C : la valeur du capital unique ;
- n : le nombre de périodes du terme desquelles le capital unique est payé ;
- Ck : la valeur de $Ck^{ième}$ du groupe avec k = 1,…p
- nk : le nombre de périodes au terme desquelles le capital k est payé, avec k=1,…,p
- t : le taux d'évaluation

L'équivalence à l'instant zéro entre le capital unique et le groupe de capitaux s'écrit :

$$C(1+i)^{-n} = \sum Ck\ (1+i)^{-nk} \quad \text{(de k=1 jusqu'à p)}$$

$$C = \sum Ck\ (1+i)^{n-nk} \quad \text{(de k=1 jusqu'à p)}$$

7. Equivalence d’un capital avec la somme de plusieurs autres

Exemple :

Déterminer, au taux de 10%, la valeur nominale d’un paiement unique, échéant dans 7 ans, destiné à remplacer les dettes suivantes :

- C1 = 1000 DH n1 = 2 ans ;
- C2 = 2000 DH n2 = 4 ans ;
- C3 = 3000 DH n3 = 6 ans ;

7.1 Cas de l’échéance commune

- Il s’agit du problème de remplacement d’un groupe de capitaux par un seul capital.

- Si la valeur du capital unique est différente de la somme des capitaux remplacés il s’agit de l’échéance commune;
- Si la valeur du capital unique est égale à la somme des valeurs des capitaux remplacés, il s’agit de l’échéance moyenne.

7.1 Cas de l'échéance commune

Exemple : un créancier accepte que son débiteur remplace trois dettes

- 15 000 DH dans 2 ans
- 20 000 DH dans 3 ans
- 35 000 DH dans 5 ans

Par versement unique de 70 800 DH, taux 10,5 %

Déterminer l'échéance de ce paiement

7.2 Cas de l'échéance moyenne

- A l'instar du cas similaire développé dans le cadre des équivalences à l'intérêt simple, l'échéance moyenne constitue un cas particulier des problèmes d'échéances communes. Il s'agit de l'échéance du capital unique dont la valeur nominale est constituée par la somme de celles des capitaux remplacés. Par définition la valeur nominale du capital unique est égale à : $C = \sum Ck$ (de k=1 à p) L'équivalence à l'instant zéro s'écrit :

- $C(1+t)^{-n} = \sum C_k (1+t)^{-nk} \longrightarrow (1+t)^{-n} = \sum C_k (1+t)^{-nk} / C$

- La valeur de n* peut être obtenue à l'aide de l'expression du logarithme:

$$-n\ln(1+i) = \ln\sum C_k (1+i)^{-nk} - \ln C$$

$$n = \ln C - \ln\sum C_k (1+i)^{-nk} / \ln(1+i)$$

7.2 Cas de l'échéance moyenne

Exemple : Calculer, au taux de 10%, l'échéance moyenne des capitaux suivants:

C1 = 1 000 DH, n1 = 2 ans,

C2 = 3 107 DH, n2 =3 ans,

C3 = 2 000 DH, n3= 4 ans,

C4 = 3 000 DH, n4 = 6 ans